

八年级数学·上 新课标 [冀教]

## 第十二章 分式和分式方程

### 12.1 分式 (第2课时)

学习新知

检测反馈

## 问题思考

下面的等式中右式是怎样从左式得到的?这种变换的理论根据是什么?

$$(1) \frac{6a^2b^3}{8a^3b^2} = \frac{3b}{4a}; \quad (2) \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{x}{x - y}.$$

**解:**(1)式中的左边,分式的分子与分母都除以 $2a^2b^2$ ,得到右式,这里 $a \neq 0, b \neq 0$ .  
(2)式中的左边,分式的分子与分母都除以 $(x+y)$ ,得到右式,这里 $(x+y) \neq 0$ .这种变换的根据是分式的基本性质:分式的分子与分母都乘(或除以)同一个不等于零的整式,分式的值不变.

化简: (1)  $\frac{18}{24}$ , (2)  $\frac{176}{264}$ . 并说出这是什么运算?运算的依据是什么?

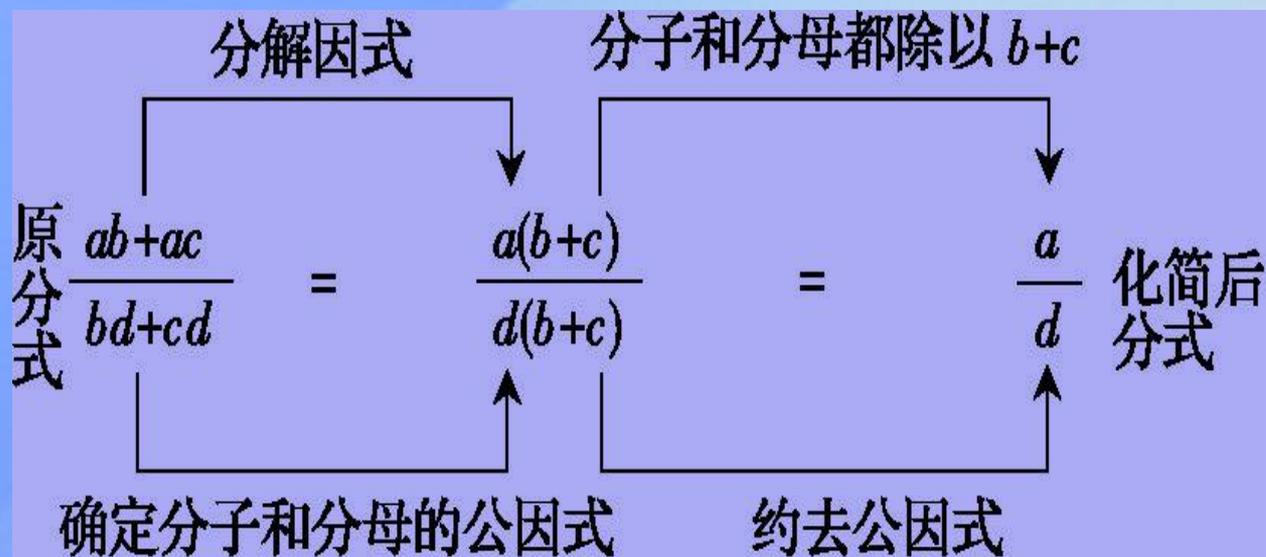
**这种运算是分数的约分,运算的依据是分数的基本性质.**

## 活动一：分式的约分和最简分式

### 1. 分式的约分

想一想：分式  $\frac{ab+ac}{bd+cd}$  能不能化简？

若能，化简的依据是什么，化简的结果又是什么？



## 归纳:

(1) 分式约分的依据是根据分式的基本性质.

(2) 约分: 依据分式的基本性质, 把分式的分子与分母的公因式约去, 叫做分式的约分.

**思考:** 若分子、分母都是单项式时, 如何找公因式? 当分子、分母都是多项式时, 又如何找公因式?

**约分的步骤:** ①先找分子与分母中的公因式. ②分子与分母同时除以公因式.

**公因式的确定方法:** ①当分子与分母都是单项式时, 所分离出的公因式的系数应是分子系数与分母系数的最大公约数, 字母因式是分子、分母相同字母的最低次幂的乘积. ②当分子与分母都是多项式时, 应先分别进行因式分解, 再找出它们的公因式.

# 1. 找出下列分式中分子与分母的公因式

$$(1) \frac{8bc}{12ac} \quad (2) \frac{3a^3b^3c}{12ac^2} \quad (3) \frac{(x+y)y}{xy^2} \quad (4) \frac{x^2+xy}{(x+y)^2} \quad (5) \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}$$

如果几个分式约分后, 分别得到了  $\frac{1}{2a}$ 、 $\frac{x}{4a}$ 、 $\frac{x}{2ay^2}$  这几个分式有什么特点? 还能继续约分吗?

这几个分式的分子与分母, 除1以外没有其他的公因式, 不能继续约分了, 这样的分式叫最简分式. 即分子和分母(除1以外)没有公因式的分式叫做最简分式.

在化简分式  $\frac{5xy}{20x^2y}$  时, 小颖和小明的做法出现了分歧:

小颖:  $\frac{5xy}{20x^2y} = \frac{5x}{20x^2}$

小明:  $\frac{5xy}{20x^2y} = \frac{5xy}{4x \cdot 5xy} = \frac{1}{4x}$

你对他们俩的解法有何看法? 说说看!

我们观察：

$$(1) \frac{12a}{7x} = \frac{36ab}{21bx} (b \neq 0)$$

$$(2) \frac{a+b}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} (a+b \neq 0)$$

这一过程由左到右是怎样变形的？根据的是什么？（小组讨论回答）

我们把以上两式由右到左的变形过程叫分式的约分。

(1) 中的  $3b$  与 (2) 中的  $(a+b)$  分别是分子与分母的公因式。

利用分式的基本性质，把分式中分子与分母的公因式约去，叫做分式的约分。

$\frac{3ac}{2a^2(a+b)}$  是最简分式. 这种说法对吗?为什么?

**解:** 不正确. 因为分式的分子和分母还能约分, 即分子与分母中含有公因式 $a$ , 所以  $\frac{3ac}{2a^2(a+b)}$  不是最简分式.

**[知识拓展]** 分式的化简, 就是把复杂的分式化为整式或最简分式, 分式的约分是根据分式的基本性质, 约去分子、分母中的公因式, 最终变为整式或最简分式.

## 活动二:例题讲解

### 例题 约分:

$$(1) \frac{35a^2b^2}{15a^3b}$$

$$(2) \frac{x^2 - y^2}{a(x+y)}$$

$$(3) \frac{4m - m^2}{m^2 - 8m + 16}$$

解:

$$(1) \frac{35a^2b^2}{15a^3b} = \frac{7b \cdot 5a^2b}{3a \cdot 5a^2b} = \frac{7b}{3a}$$

$$(2) \frac{x^2 - y^2}{a(x+y)} = \frac{(x+y)(x-y)}{a(x+y)} = \frac{x-y}{a}$$

$$(3) \frac{4m - m^2}{m^2 - 8m + 16} = \frac{m(4-m)}{(4-m)^2} = \frac{m}{4-m}$$

## 方法归纳:

- (1) 如果分式的分子、分母都是单项式, 那么直接约去分子与分母的公因式;
- (2) 如果分式的分子、分母是多项式, 那么能因式分解的先因式分解, 由此找出公因式, 再进行约分.
- (3) 约分后, 分子与分母(除1外)不能再有公因式.

做一做

【拓展延伸】 约分  $\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd}$  ,

为了把上述分式约分,应该先确定分式的分子与分母的公因式,那么分式的分子与分母的公因式是什么?

解: 
$$\frac{-32a^2b^3c}{24b^2cd} = -\frac{8b^2c \cdot 4a^2b}{8b^2c \cdot 3d} = -\frac{4a^2b}{3d}$$

## 课堂小结

1. 约分: (1) 分式约分的结果一定要化成最简.  
(2) 如果分式的分子或分母是多项式, 可先考虑把它分解因式, 得到因式乘积形式, 再约去分子与分母的公因式. 如果分子或分母中的多项式不能分解因式, 此时就不能把分子、分母中的某些项单独约分.
2. 最简分式: 判断一个分式是不是最简分式, 关键是确定其分子和分母(除1以外)是否有公因式.
3. 分式进行约分的目的是要把这个分式化为最简分式或整式. 分式约分时要注意正确运用乘方的符号法则, 如 $x-y=-(y-x)$ ,  $(x-y)^2=(y-x)^2$ ,  $(x-y)^3=-(y-x)^3$ .

# 检测反馈

1.化简的  $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$  结果是 ( **A** )

A.  $\frac{a+b}{a-b}$       B.  $\frac{b}{a-b}$       C.  $\frac{a}{a+b}$       D.  $\frac{b}{a+b}$

【解析】  $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$ . 故选A.

2. 下列约分正确的是 ( C )

A.  $\frac{x^6}{x^2} = x^3$

B.

$$\frac{x+y}{x+y} = 0$$

C.  $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

D.

$$\frac{2xy^2}{4x^2y} = \frac{1}{2}$$

【解析】 A.  $\frac{x^6}{x^2} = x^4$ ，故A选项错误； B.  $\frac{x+y}{x+y} = 1$ ，

故B选项错误； C.  $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ ，故C选项正确； D.  $\frac{2xy^2}{4x^2y} = \frac{y}{2x}$ ，

故D选项错误。 故选C。

3. 下列分式是最简分式的是 ( A )

A.  $\frac{2x}{x^2+1}$

B.  $\frac{x-1}{x^2-1}$

C.  $\frac{4}{2x}$

D.  $\frac{1-x}{x-1}$

【解析】 A.  $\frac{2x}{x^2+1}$  不能约分，是最简分式，

B.  $\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$  , C.  $\frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$  , D.  $\frac{1-x}{x-1} = -1$  . 故选A.

4. 下列各式中, 正确的是 ( A )

$$A. \frac{6-2x}{-x+3} = 2$$

$$B. \frac{a-b}{(a-b)(a+b)} = 0$$

$$C. \frac{(a-b)^3}{(b-a)^3} = 1$$

$$D. \frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = -1$$

【解析】 A.  $\frac{6-2x}{-x+3} = \frac{2(3-x)}{3-x} = 2$ , 故此选项正确;

B.  $\frac{a-b}{(a-b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$ , 故此选项错误;

C.  $\frac{(a-b)^3}{(b-a)^3} = -1$ , 故此选项错误;

D.  $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2} = 1$ , 故此选项错误; 故选A.

## 5. 将下列分式约分.

$$(1) \frac{10a^3bc}{-5a^2b^3c^2} \quad (2) \frac{-2a(a+b)}{3b(a+b)} \quad (3) \frac{(a-x)^2}{(x-a)^3} \quad (4) \frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$$

**【解析】** (1) 根据分式的基本性质，分子分母同时除以  $5a^2bc$ ；

(2) 约去分母、分子中的公因式  $(a+b)$  即可；

(3) 先把分子中的  $(a-x)^2$  转变成  $(x-a)^2$ ，再分子、分母约分即可；

(4) 根据平方差公式进行因式分解，再约分即可.

**解：** (1)  $\frac{10a^3bc}{-5a^2b^3c^2} = -\frac{2a}{b^2c}$ .

(2)  $\frac{-2a(a+b)}{3b(a+b)} = -\frac{2a}{3b}$ .

(3)  $\frac{(a-x)^2}{(x-a)^3} = \frac{(x-a)^2}{(x-a)^3} = \frac{1}{x-a}$ .

(4)  $\frac{x^2-25}{x^2-10x+25} = \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)^2} = \frac{x+5}{x-5}$ .

6. 在给出的三个多项式： $x^2+4xy+4y^2$ ,  $x^2-4y^2$ ,  $x^2+2xy$ 中, 请你任选出两个分别作为分子和分母组成分式, 并进行化简运算.

**【解析】** 任意选择出两个多项式, 一个作为分子, 另一个作为分母, 再进行因式分解, 约分即可.

解: (答案不唯一) 选 $x^2+4xy+4y^2$ 作分子,  $x^2-4y^2$ 作分母, 则:

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x^2 - 4y^2} = \frac{(x + 2y)^2}{(x + 2y)(x - 2y)} = \frac{x + 2y}{x - 2y}.$$