

义务教育课程标准实验教科书

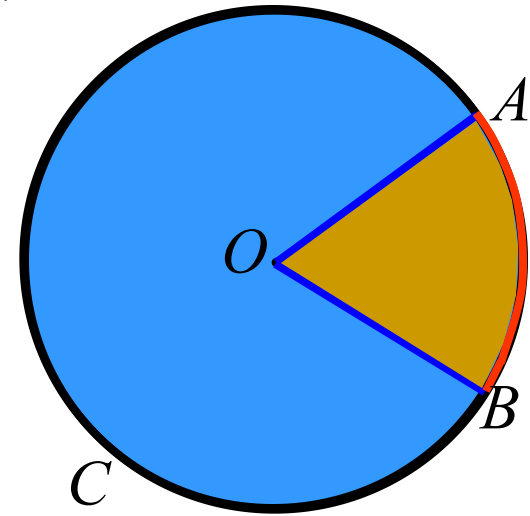
九年级 上册

27.4弧长和扇形面积



一条弧和经过这条弧的端点的两条半径所组成的图形叫做**扇形**.

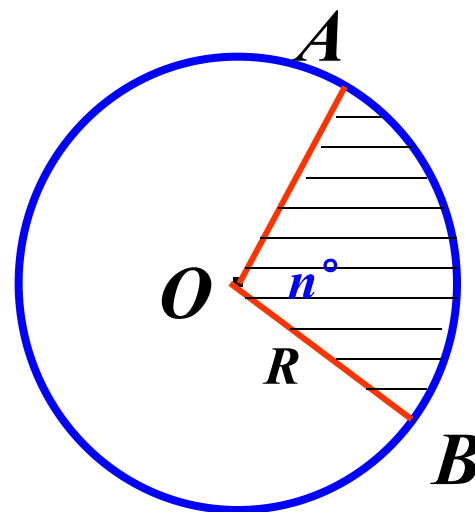
在 $\odot O$ 中, 由半径 OA, OB 和 $\widehat{AB}$ 所构成的图形是扇形.



在 $\odot O$ 中, 由半径 OA, OB 和 $\widehat{ACB}$ 所构成的图形是扇形.

在同圆或等圆中, 由于相等的圆心角所对的弧相等, 所以具有相等圆心角的扇形, 其面积也相等.

如图，由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形，可以发现，扇形面积与组成扇形的圆心角的大小有关，圆心角越大，扇形面积也就越大。怎样计算圆半径为 R ，圆心角为 n° 的扇形面积呢？





做一做

1. 你还记得圆周长的计算公式吗？
2. 圆的周长可以看作是多少度的圆心角所对的弧长？
3. 1° 的圆心角所对弧长是多少？
4. n° 的圆心角呢？

半径为 R 圆的周长为 $C = 2\pi R$

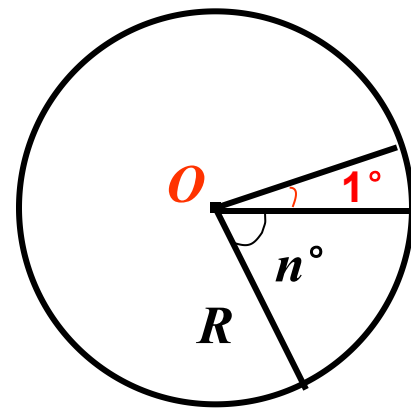
可以看作是 360° 圆心角所对的弧长

1° 的圆心角所对弧长是

$$\frac{1}{360} \times 2\pi R$$

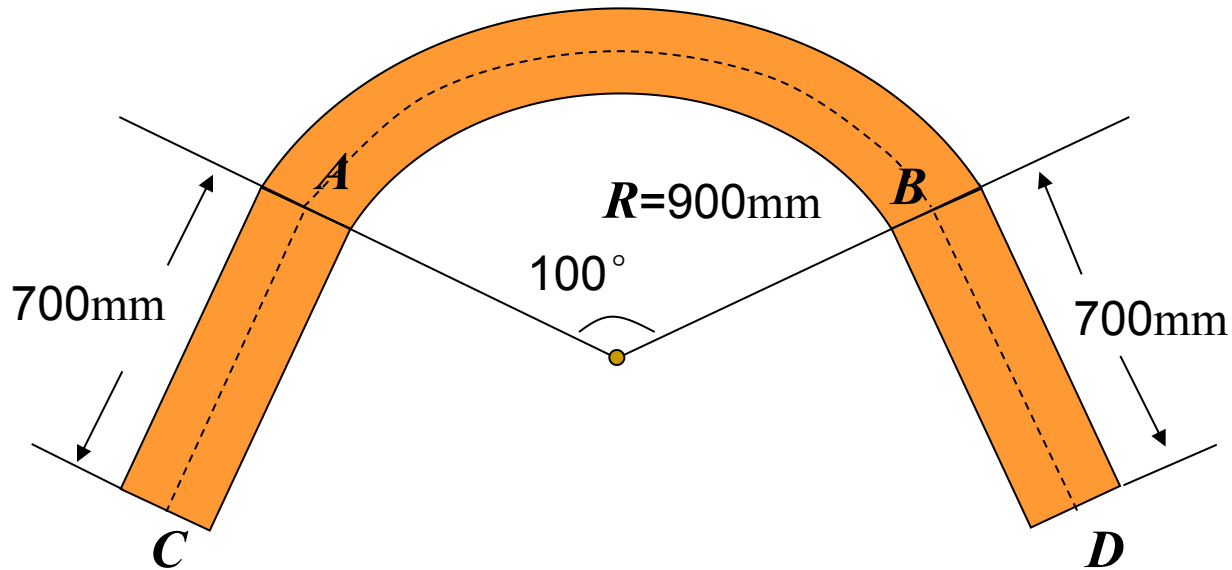
n° 的圆心角所对的弧长

$$l = \frac{1}{360} \times 2\pi R \times n = \frac{n\pi R}{180}$$

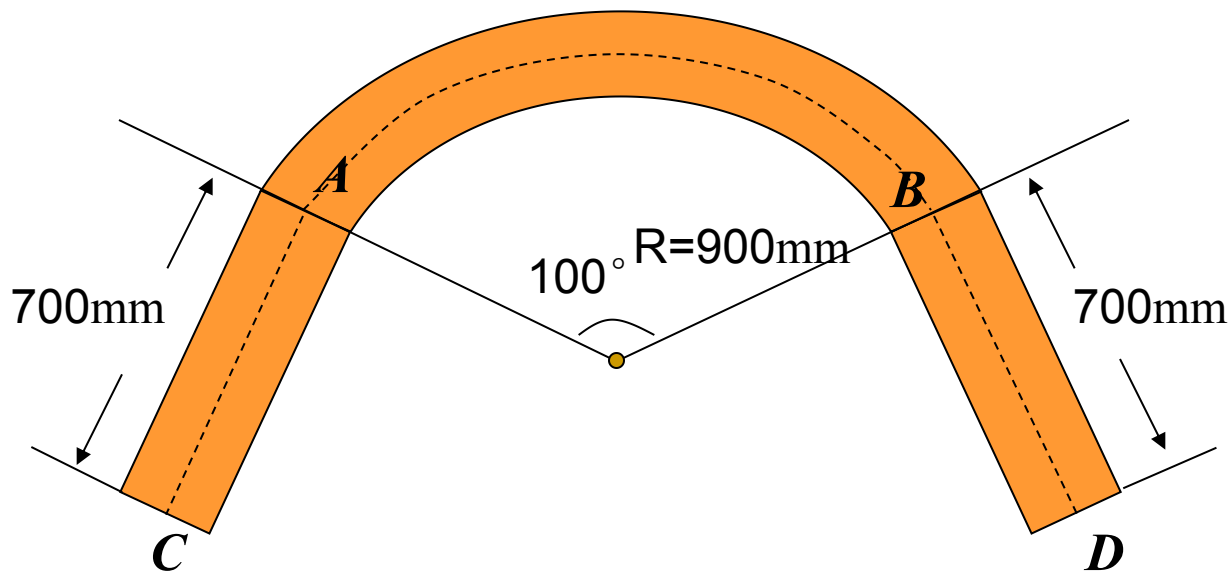


问题情境

制造弯形管道时，经常要先按中心线计算“展直长度”（图中虚线成的长度），再下料，这就涉及到计算弧长的问题。



如何求 $\widehat{AB}$ 长？



由上面的弧长公式，可得 $\widehat{AB}$ 的长

$$l = \frac{100 \times 900 \times \pi}{180} = 500\pi \approx 1570(\text{mm}).$$

因此所要求的展直长度

$$L = 2 \times 700 + 1570 = 2970(\text{mm}).$$

练习

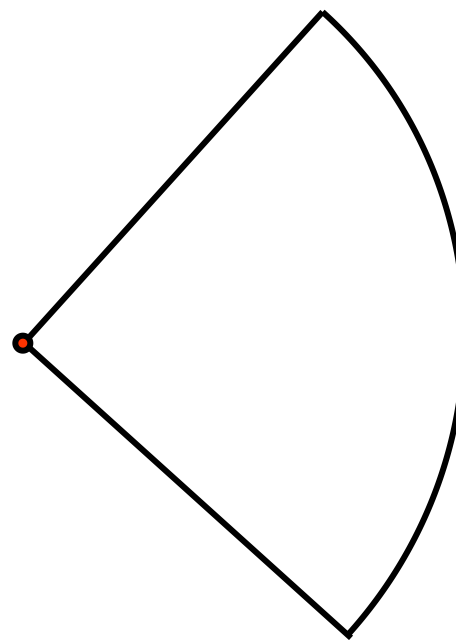
1.有一段弯道是圆弧形的，道长是12m，弧所对的圆心角是 81° ，求这段圆弧的半径 R （精确到0.1m）.

解：由弧长公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$

得：

$$R = \frac{180l}{n\pi}$$

$$R = \frac{180l}{n\pi} = \frac{180 \times 12}{81 \times 3.14} \approx 8.5m.$$



答：这段圆弧的半径 R 为8.5m.

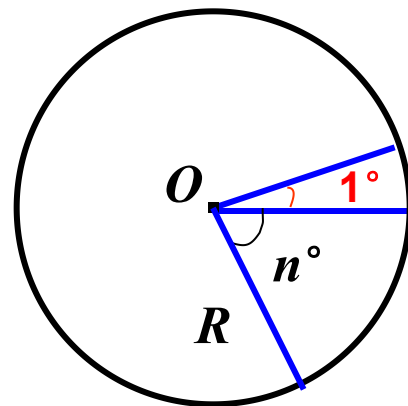


1. 你还记得圆面积公式吗？
2. 圆面积可以看作是多少度的圆心角所对的扇形的面积？
3. 1° 的圆心角所对的扇形面积是多少？
4. n° 的圆心角呢？

圆的面积公式： $S = \pi R^2$,

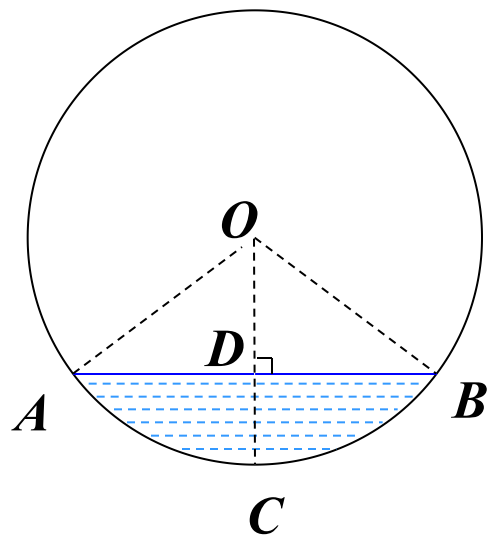
360° 的圆心角所对的扇形的面积，

1° 的圆心角所对的扇形面积是 $\frac{1}{360} \times 2\pi R^2$,



圆心角为 n° 的扇形面积是 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$.

例1 如图，水平放置的圆柱形排水管道的截面半径是**0.6m**，其中水面高**0.3m**，求截面上有水部分的面积（精确到**0.01m²**）.



有水部分的面积

$$\begin{aligned}
 S &= S_{\text{扇形}OAB} - S_{\triangle OAB} \\
 &= \frac{120\pi}{360} \times 0.6^2 - \frac{1}{2} AB \cdot OD \\
 &= 0.12\pi - \frac{1}{2} \times 0.6\sqrt{3} \times 0.3 \\
 &\approx 0.22(\text{m}^2).
 \end{aligned}$$

解：如图，连接***OA***、***OB***，作弦***AB***的垂直平分线，垂足为***D***，交 **$\widehat{AB}$** 于点***C***.

$$\because OC=0.6, DC=0.3,$$

$$\therefore OD=OC-DC=0.3.$$

在 **$\text{Rt}\triangle OAD$** 中， **$OA=0.6$** ，利用勾股定理可得，

$$AD = 0.3\sqrt{3}$$

在 **$\text{Rt}\triangle AOD$** 中， $OD = \frac{1}{2}OA$

$$\therefore \angle OAD=30^\circ$$

$$\therefore \angle AOD=60^\circ, \angle AOB=120^\circ$$

2.如图，正三角形 ABC 的边长为 a ，分别以 A 、 B 、 C 为圆心，以 $\frac{a}{2}$ 为半径的圆相切于点 D 、 E 、 F ，求图中阴影部分的面积.

解：连接 AD ，则

$AD \perp BC$ 垂足为 D

根据勾股定理，得

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} a \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

$$S_{\text{扇形}BDF} = \frac{1}{12} a^2 \pi.$$

又知， $S_{\text{扇形}BDF} = S_{\text{扇形}CDE} = S_{\text{扇形}AEF}$,

$$S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - 3S_{\text{扇形}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - 3 \times \frac{a^2 \pi}{12} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} - \frac{a^2 \pi}{4}$$

