



单击键盘Esc键返回本章目录



28.4 垂径定理*

数学

点击查看更方便



学习目标

1. 理解圆的轴对称性及垂径定理的推证过程；能初步应用垂径定理进行计算和证明；
2. 进一步培养学生观察问题、分析问题和解决问题的能力；
3. 通过圆的对称性，培养学生对数学的审美观，并激发学生对数学的热爱。

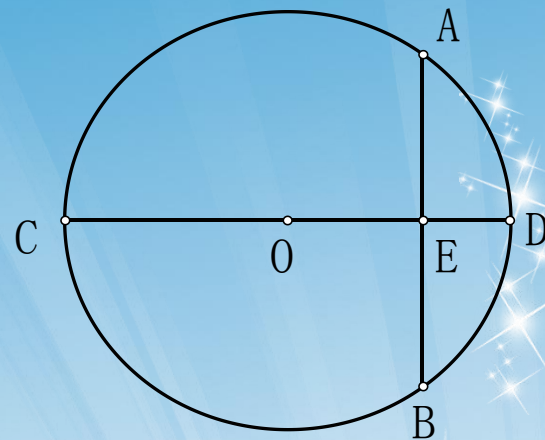
数学

点击查看更方便



一起探究

如图，在 $\odot O$ 中， CD 为直径， AB 为弦，且 $CD \perp AB$ ，垂足为 E 。



想一想：如果将 $\odot O$ 沿着 CD 所在直线对折，哪些线段重合，哪些弧重合？
线段 AE 与 BE ， $\widehat{AC}$ 与 $\widehat{BC}$ ， $\widehat{AD}$ 与 $\widehat{BD}$

猜想：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

数学

点击查看更方便



证明猜想

已知：在 $\odot O$ 中， CD 是直径， AB 是弦， $CD \perp AB$ ，垂足为 E 。

求证： $AE=BE$ ， $\widehat{AC}$ 与 $\widehat{BC}$ ， $\widehat{AD}$ 与 $\widehat{BD}$ 相等

证明：如图，连接 OA ， OB 在 $\triangle OAB$ 中，

$$\because OA=OB, OE \perp AB,$$

$$\therefore AE=BE, \angle AOE=\angle BOE$$

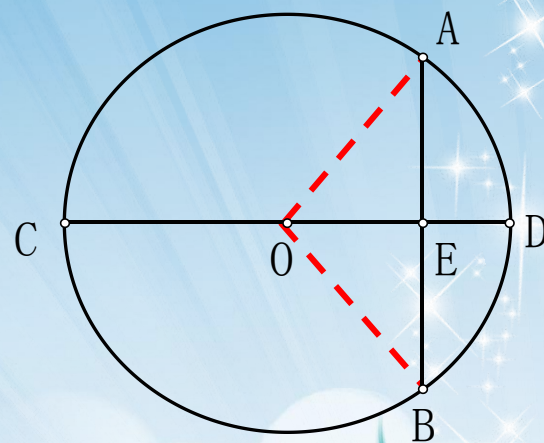
$$\therefore \widehat{AD}=\widehat{BD}.$$

$$\because \angle AOC=180^\circ-\angle AOE,$$

$$\angle BOC=180^\circ-\angle BOE,$$

$$\therefore \angle AOC=\angle BOC.$$

$$\therefore \widehat{AC}=\widehat{BC}.$$



数学

点击查看更方便



垂径定理

垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧。

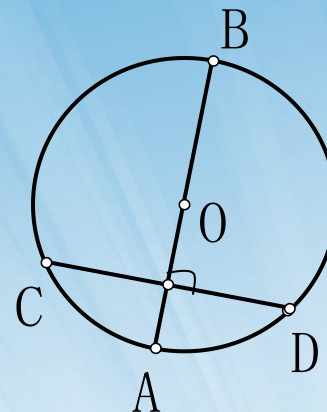
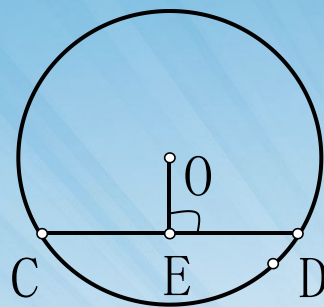
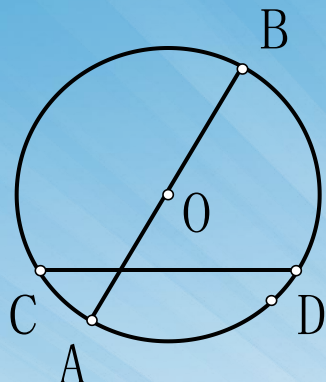
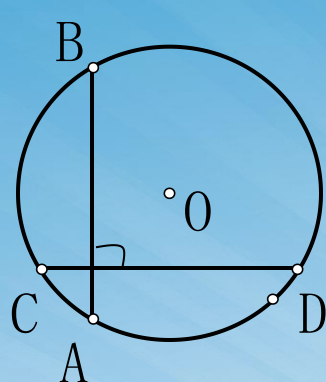
数学

点击查看更方便



定理辨析

判断下列图形，能否使用垂径定理？



【解析】定理中两个条件（直径垂直于弦）缺一不可，故前三个图均不能，仅第四个图可以！

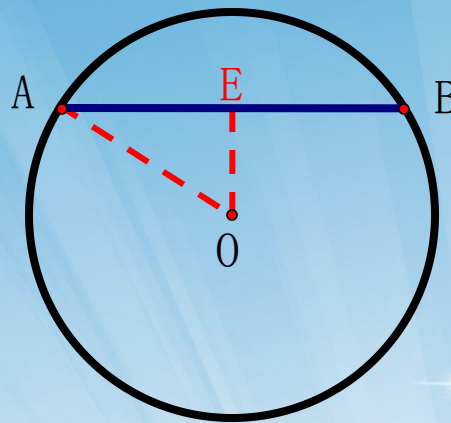
数学

点击查看更方便



例题

例1：如图，已知在圆O中，弦AB的长为8cm，圆心O到AB的距离为3 cm，求圆O的半径.



【解析】根据题意得，

$AE=4\text{cm}$, $OE \perp AB$, $OE=3\text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle OEA$ 中，根据勾股定理得：

$$AO^2 = OE^2 + AE^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$$

$$AO = 5\text{cm}.$$

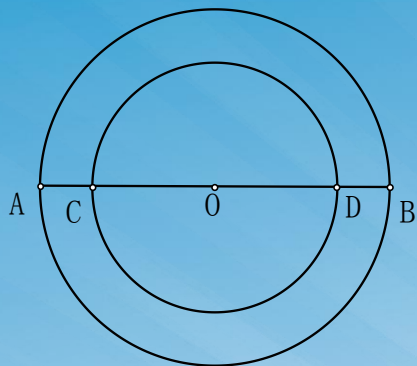
数学

点击查看更方便

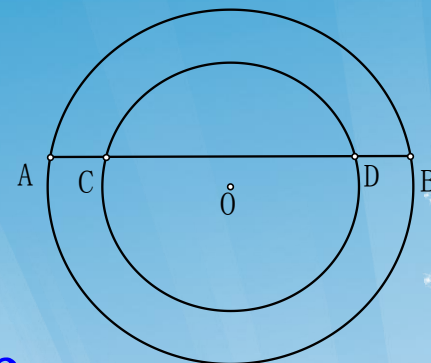


归纳:

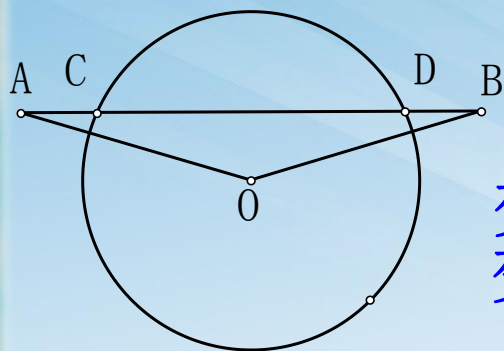
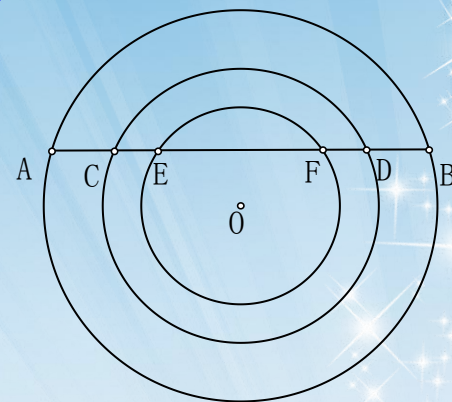
变式1: AC, BD有什么关系?



变式2: $AC=BD$ 依然成立吗?

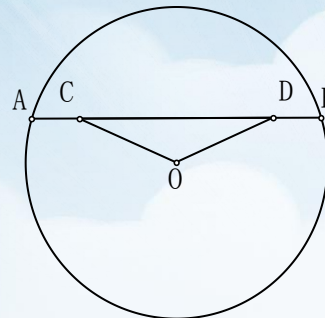


变式3: $EA = \underline{FB}$, $EC = \underline{FD}$.



变式4: $\underline{OA=OB}$ $AC=BD$.

变式5: $\underline{OC=OD}$ $AC=BD$.



数学

点击查看更方便

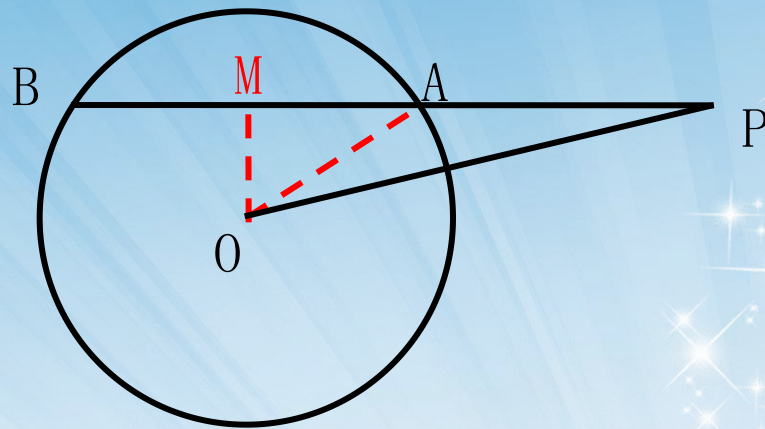


跟踪训练

如图，P为 $\odot O$ 的弦BA延长线上一点， $PA=AB=2$ ， $PO=5$ ，求 $\odot O$ 的半径.

【解析】提示作OM 垂直于PB，连接OA.

答案： $\sqrt{17}$



关于弦的问题，常常需要过圆心作弦的垂线段，这是一条非常重要的辅助线.

数学

点击查看更方便



画图叙述垂径定理，并说出定理的题设和结论。

题设

①直线CD经过圆心O

②直线CD垂直弦AB

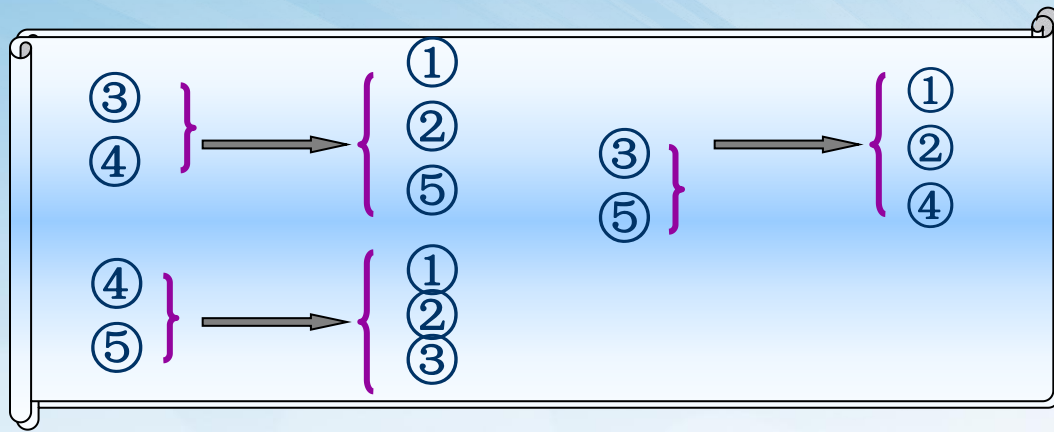
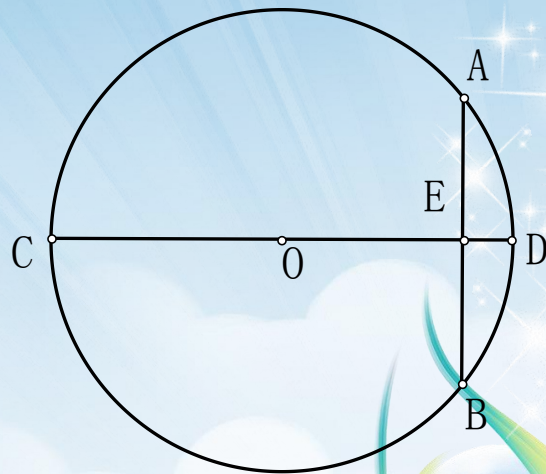
结论

③直线CD平分弦AB

④直线CD平分弧ACB

⑤直线CD平分弧AB

想一想：如果将题设和结论中的5个条件适当互换，情况会怎样？



数学

点击查看更方便

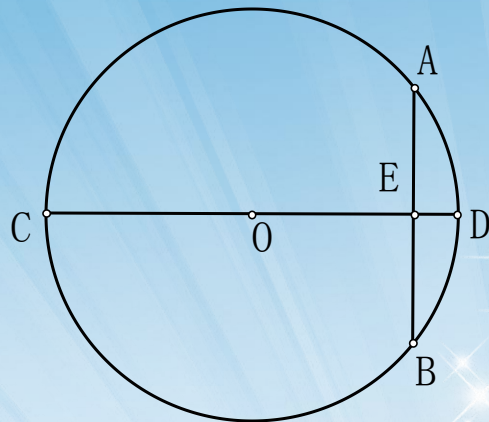


推论1

(1) 平分弦（不是直径）的直径垂直于弦，并且平分弦所对的两条弧；

(2) 弦的垂直平分线经过圆心，并且平分弦所对的两条弧；

(3) 平分弦所对的一条弧的直径，垂直平分弦并且平分弦所对的另一条弧。



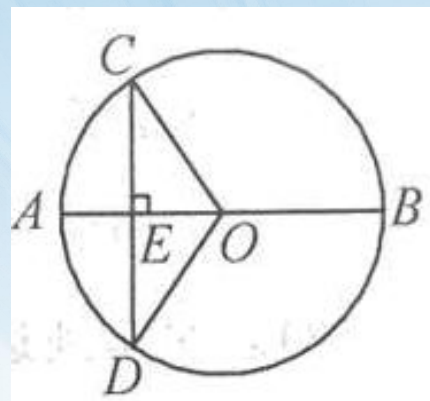


随堂练习

1. 已知 $\odot O$ 的半径为5, 弦AB的弦心距为3,
则AB的长是(**D**)

A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

2. 如图, 已知 $\odot O$ 的直径AB $\perp$ 弦CD于点E, 下列结论中一定正确的是 (**B**)



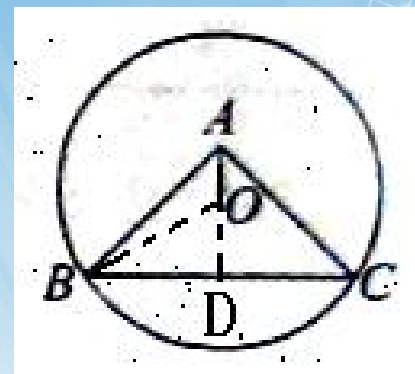
A. $AE = OE$ B. $CE = DE$
C. $OE = \frac{1}{2} CE$ D. $\angle AOC = 60^\circ$

数学

点击查看更方便



3. 如图， $\odot O$ 过点B ,C. 圆心O在等腰直角 $\triangle ABC$ 的内部，
 $\angle BAC=90^\circ$ ， $OA=1$ ， $BC=6$ ，则 $\odot O$ 的半径为（ ）
 A. B. C. D.



【解析】选D. 延长AO交BC于点D，连接OB，
 根据对称性知 $AO \perp BC$ ，则 $BD=DC=3$.

又 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $\angle BAC=90^\circ$ ，
 则 $AD=3$ ， $\therefore OD=3-1=2$ ，

$$\therefore OB = \frac{1}{2} BC = 3$$

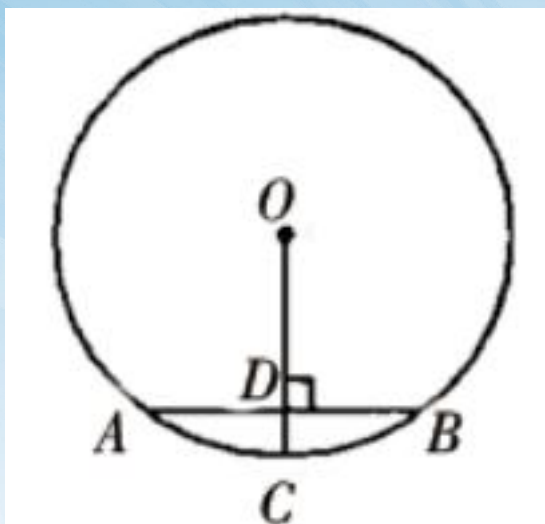
$$\therefore \text{半径} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$



4. 如图，AB为 $\odot O$ 的弦， $\odot O$ 的半径为5， $OC \perp AB$ 于点D，交 $\odot O$ 于点C，且 $CD=1$ ，则弦AB的长是_____.

【解析】如图所示，连接OB，则 $OB=5$ ， $OD=4$ ，利用勾股定理求得 $BD=3$ ，因为 $OC \perp AB$ 于点D，所以 $AD=BD=3$ ，所以 $AB=6$.

答案：6



数学

点击查看更多方便



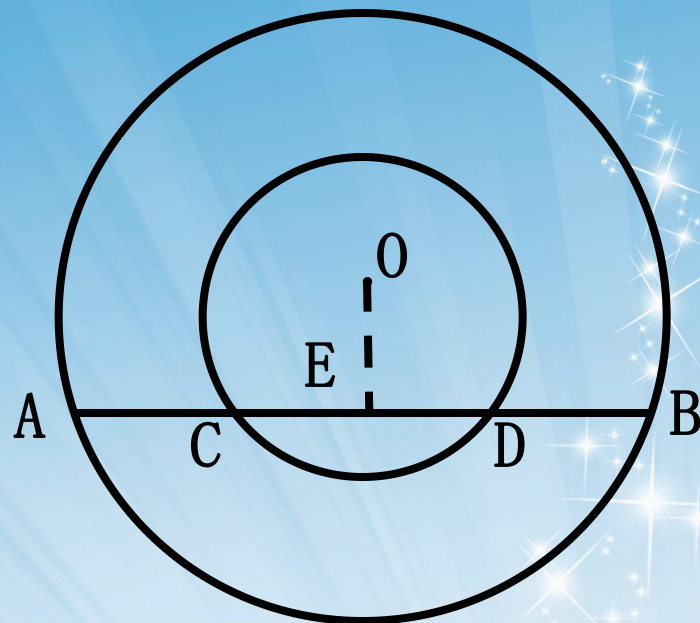
5、已知：如图，在以O为圆心的两个同心圆中，大圆的弦AB交小圆于C，D两点.

求证： $AC=BD$.

证明：过O作 $OE \perp AB$ ，垂足为E，
则 $AE=BE$ ， $CE=DE$.

$AE - CE = BE - DE$.

所以 $AC=BD$.



数学

点击查看更方便



小 结

通过本课时的学习，需要我们：

1. 理解圆的轴对称性及垂径定理的推理过程；
能初步应用垂径定理进行计算和证明；
2. 掌握垂径定理的推论，明确理解“知二得三”
的意义. 利用垂径定理及其推论解决相应的数学问题.



数学

点击查看更多方便